

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DE GÉNIE MATHÉMATIQUE ET MODÉLISATION

PROBLÈMES INSTATIONNAIRES

Résolution et Simulation numérique des équations de Navier-Stokes

Présenté par :

AGBODOYETIN Jude Séruch
MAMLANKOU Charbel Z. J.
VODOUNOU Léonel Junior

Sous la supervision de :

Dr Jamal ADETOLA

21 Mai 2024

Table des matières

0.1	Généralités	3
0.1.1	Équations de Navier-Stokes	3
0.2	Proposition d'un schéma numérique	4
0.2.1	Semi-discrétisation en temps	4
0.2.2	Discrétisation totale	5
0.2.3	Stabilité du schéma	9
0.3	Simulations numérique	9

Introduction

En mécanique des fluides, les équations de **Navier-Stokes** sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens. La résolution de ces équations modélisant un fluide comme un milieu continu à une seule phase est difficile, et l'existence mathématique de solutions de ces équations n'est pas démontrée. Mais elles permettent souvent, par une résolution approchée, de proposer une modélisation de nombreux phénomènes, comme les courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, le comportement des gratte-ciel ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et les ingénieurs, ou encore celui des avions, des trains ou des voitures à grande vitesse pour leurs bureaux d'études concepteurs, ainsi que l'écoulement de l'eau dans un tuyau et de nombreux autres phénomènes d'écoulement de divers fluides.

Ces équations sont nommées ainsi pour honorer les travaux de deux scientifiques du XIX^e siècle : le mathématicien et ingénieur des Ponts, **Henri Navier**, qui le premier a introduit la notion de viscosité dans les équations d'Euler en 1822, et le physicien **George Gabriel Stokes**, qui a donné sa forme définitive à l'équation de conservation de la quantité de mouvement en 1845. Entre-temps, divers scientifiques ont contribué à l'avancement du sujet : Augustin Louis Cauchy, Siméon Denis Poisson en 1829 et Adhémar Barré de Saint-Venant en 1843.

Dans cette étude, nous aurons principalement, à proposer un schéma numérique par discrétisation en différences finies et à effectuer une simulation numérique pour visualiser un cas pratique de la mise en évidence des équations de Navier-Stokes.

0.1 Généralités

0.1.1 Équations de Navier-Stokes

— Comment se présentent-elles ?

Les équations de Navier-Stokes sont des équations aux dérivées partielles non-linéaires qui décrivent le mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Elles ont une grande importance en mécanique des fluides, en ingénierie et en physique. Les équations de Navier-Stokes en dimension d sont :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega,$$

où $\mathbf{u}(x, t)$ est la vitesse du fluide à la position $x \in \Omega$ et au temps t , $p(x, t)$ est la pression, $\rho = \frac{\mu}{\nu}$ la masse volumique du fluide, ν est la viscosité cinématique, μ est la viscosité dynamique, $\mathbf{f}(x, t)$ est la force externe appliquée au fluide et ∇ est l'opérateur gradient.

La première équation est l'équation de conservation de la quantité de mouvement, qui décrit l'évolution de la vitesse du fluide en fonction des forces qui s'appliquent. La seconde équation est l'équation de continuité, qui exprime la conservation de la masse.

Dans la suite de notre étude, nous prendrons $\mathbf{f}(x, t) = 0$ et nous allons nous limiter à l'ordre $d = 2$. En multipliant chaque membre de l'équation de conservation par ρ , on obtient :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

— Etablissement des équations

0.2 Proposition d'un schéma numérique

On considère les équations de Navier-Stokes incompressibles posées dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Afin de ne pas compliquer la description de la méthode numérique, on choisit désormais le carré unité comme domaine c'est-à-dire $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. On va décrire un schéma de type MAC (Marker And Cell) pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. Ce schéma est semi-implicite en temps et il est obtenu en linéarisant (en temps) le terme non linéaire des équations de Navier-Stokes.

Dans les équations de Navier-Stokes incompressibles, les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x,t)$ et la pression $p = p(x,t)$ du fluide au point $x = (x,y) \in \Omega$ et à l'instant t . La vitesse est une fonction vectorielle $\mathbf{u} = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ avec $u = u(x,y,t)$, $v = v(x,y,t)$ et la pression p est une fonction scalaire. Ces inconnues vérifient les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$$

$$\mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega$$

La deuxième équation traduit l'incompressibilité du fluide. Le paramètre $\nu > 0$ prend en compte la viscosité du fluide et $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ représente les forces extérieures (la gravité par exemple). La fonction $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x, t)$ dans la condition limite de Dirichlet (ligne 3 de l'équation) sur le bord du domaine doit être à flux nul sur $\partial\Omega$, c'est-à-dire qu'on suppose que :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

où $\mathbf{n}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$. Cette condition est *nécessaire* pour que le problème de Navier-Stokes admette une solution. La condition sur $\mathbf{g}$ est une condition de compatibilité avec la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

0.2.1 Semi-discrétisation en temps

Soit $\Delta t > 0$, le pas de discrétisation en temps et on note les instants $t^n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$.

On définit les approximations en temps de la vitesse

$$\mathbf{u}^n(x) \simeq \mathbf{u}(x, t^n) \text{ et de la pression } p^n(x) \simeq p(x, t^n).$$

Connaissant $\mathbf{u}^{n-1}$, on détermine $\mathbf{u}^n$ et p^n par le schéma :

$$\frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} + (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \nu \Delta \mathbf{u}^n + \nabla p^n = \mathbf{f}^n \quad \text{dans } \Omega$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}^n) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$\mathbf{u}^n = \mathbf{g}^n \quad \text{sur } \partial\Omega$$

0.2.2 Discrétisation totale

Pour raison de simplicité, nous prenons $\mathbf{g} = 0$. On discrétise à présent en espace le problème semi-discrétisé en temps. On choisit $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Le domaine Ω est discrétisé par une grille uniforme définie par les points

$$P_{ij} = (ih, jh), i, j = 0, 1, \dots, N+1 \quad \text{avec} \quad h = \frac{1}{N+1}$$

On cherche alors les approximations de la vitesse

$$u_{ij}^n(\mathbf{x}) \simeq u(P_{ij}, t^n), v_{ij}^n(\mathbf{x}) \simeq v(P_{ij}, t^n)$$

— Discrétisation du Laplacien

$$\Delta_h u_{ij} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}) + \frac{1}{h^2}(u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}) \quad \text{pour} \quad i, j = 1, \dots, N+1$$

— Le terme de convection

Nous utiliserons un schéma décentré upwind <https://http://analyse-numerique.org/node114.html>.

$$(\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n = (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla u^n, \mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla v^n) \quad \text{et}$$

$$\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla w = u^{n-1} \frac{\partial w}{\partial x} + v^{n-1} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{avec} \quad w = u^n \quad \text{ou} \quad v^n)$$

On définit les opérateurs aux différences décentrées

$$D_{x,h}^+ w_{ij} = \frac{(w_{i,j} - w_{i-1,j})}{h}, D_{x,h}^- w_{ij} = \frac{(w_{i+1,j} - w_{i,j})}{h}$$

avec des formules similaires pour $D_{y,h}^+ w_{ij}$ et $D_{y,h}^- w_{ij}$

Les approximations upwind s'écrivent alors

$$u^{n-1} \frac{\partial w}{\partial x}(P_{ij}) \simeq \begin{cases} u_{ij}^{n-1} D_{x,h}^+ w_{ij} & \text{si } u_{ij}^{n-1} > 0, \\ u_{ij}^{n-1} D_{x,h}^- w_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v^{n-1} \frac{\partial w}{\partial x}(P_{ij}) \simeq \begin{cases} v_{ij}^{n-1} D_{y,h}^+ w_{ij} & \text{si } v_{ij}^{n-1} > 0, \\ v_{ij}^{n-1} D_{y,h}^- w_{ij} & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = \min(u, 0)$. On peut donc écrire :

$$u^{n-1} \frac{\partial w}{\partial x}(P_{ij}) \simeq (u_{ij}^{n-1})^+ D_{x,h}^+ w_{ij} + (u_{ij}^{n-1})^- D_{x,h}^- w_{ij}$$

$$v^{n-1} \frac{\partial w}{\partial x}(P_{ij}) \simeq (v_{ij}^{n-1})^+ D_{y,h}^+ w_{ij} + (v_{ij}^{n-1})^- D_{y,h}^- w_{ij}$$

On obtient l'approximation suivante :

$$\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla w(P_{ij}) \simeq C_h(\mathbf{u}^{n-1}, w_{ij})$$

où

$$C_h(\mathbf{u}^{n-1}, w_{ij}) = (u_{ij}^{n-1})^+ D_{x,h}^+ w_{ij} + (u_{ij}^{n-1})^- D_{x,h}^- w_{ij} + (v_{ij}^{n-1})^+ D_{y,h}^+ w_{ij} + (v_{ij}^{n-1})^- D_{y,h}^- w_{ij}$$

En tenant compte du fait que $|u| = u^+ - u^-$, on obtient

$$\begin{aligned} C_h(\mathbf{u}^{n-1}, w_{ij}) = & \frac{1}{h} (-(u_{ij}^{n-1})^+ w_{i-1,j} + (|u_{ij}^{n-1}| + |v_{ij}^{n-1}|) w_{ij} + (u_{ij}^{n-1})^- w_{i+1,j} \\ & -(v_{ij}^{n-1})^+ w_{i,j-1} + (v_{ij}^{n-1})^- w_{i,j+1}) \end{aligned}$$

— Discrétisation de l'équation $\operatorname{div} \mathbf{u}^n = 0$

Schéma de MAC

Pour obtenir le même nombre d'équations que d'inconnues, il faut s'arranger pour que les points de discrétisations de la pression p soient ceux auxquels on discrétise l'équation d'incompressibilité. On discrétise donc l'équation $\mathbf{u}^n = 0$ par

$$\frac{1}{2h} (u_{ij}^n + u_{i,j+1}^n - u_{i+1,j}^n - u_{i+1,j+1}^n) + \frac{1}{2h} (v_{ij}^n + v_{i+1,j}^n - v_{i,j+1}^n - v_{i+1,j+1}^n) = 0$$

Cette discrétisation représente l'équation $\mathbf{u}^n = 0$ aux points

$$P_{i+1/2,j+1/2} = \{ (i+1/2)h, (j+1/2)h \}$$

On cherchera alors les approximations de la pression aux points où l'équation de la divergence est discrétisée, c'est-à-dire les approximations

$$p_{i+1/2,j+1/2}^n \simeq p(P_{i+1/2,j+1/2}, t^n) \quad \text{pour } i, j = 0, \dots, N$$

On note les valeurs moyennes de la pression comme suit

$$p_{i+1/2,j}^n = \frac{1}{2} (p_{i+1/2,j+1/2}^n + p_{i+1/2,j-1/2}^n)$$

$$p_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{2} (p_{i+1/2,j+1/2}^n + p_{i-1/2,j+1/2}^n)$$

Une approximation du gradient de la pression en $P_{i+1/2,j+1/2}$ peut alors s'écrire

$$\nabla p(P_{i+1/2,j+1/2}) \simeq (\delta_{x,h} p_{i+1/2,j+1/2}, \delta_{y,h} p_{i+1/2,j+1/2})$$

avec

$$\delta_{x,h} p_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{h} (p_{i+1/2,j}^n - p_{i-1/2,j}^n) \quad \text{soit}$$

$$\delta_{x,h} p_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2h} (p_{i+1/2,j+1/2}^n + p_{i+1/2,j-1/2}^n - p_{i-1/2,j+1/2}^n - p_{i-1/2,j-1/2}^n)$$

et

$$\delta_{y,h} p_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{h} (p_{i,j+1/2}^n - p_{i,j-1/2}^n) \quad \text{soit}$$

$$\delta_{y,h} p_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2h} (p_{i+1/2,j+1/2}^n + p_{i-1/2,j+1/2}^n - p_{i+1/2,j-1/2}^n - p_{i-1/2,j-1/2}^n)$$

On obtient alors une discrétisation de l'équation de Navier-Stokes et elle se présente comme suit

$$\frac{u_{ij}^n}{\Delta t} + C_h(\mathbf{u}^{n-1}, u_{ij}^n) - \nu \Delta_h u_{ij}^n + \delta_{x,h} p_{i+1/2,j+1/2} = f_{(1),ij}^n + \frac{u_{ij}^{n-1}}{\Delta t}$$

$$\frac{v_{ij}^n}{\Delta t} + C_h(\mathbf{u}^{n-1}, v_{ij}^n) - \nu \Delta_h v_{ij}^n + \delta_{y,h} p_{i+1/2,j+1/2} = f_{(2),ij}^n + \frac{v_{ij}^{n-1}}{\Delta t}$$

pour $i, j = 1, \dots, N$

Le schéma MAC fournit le même nombre d'équations que d'inconnues. En effet, il y a $2N^2$ équations de Navier-Stokes et $(N+1)^2$ équations pour l'équation de la divergence, soit au total $2N^2 + (N+1)^2$ équations. Par ailleurs, on a $2N^2$ inconnues pour la vitesse et $(N+1)^2$ inconnues pour la pression, soit au total $2N^2 + (N+1)^2$ inconnues.

— Forme matricielle du schéma semi-implicite

On ordonne les noeuds du maillage en partant du bas vers le haut et de la gauche vers la droite. Pour le vecteur vitesse, on stocke la première puis la deuxième composante :

$$U^n = \left(\underbrace{u_{11}^n, u_{21}^n, \dots, u_{N1}^n}_{\text{1ere ligne pour } u^n}, \dots, \underbrace{u_{1N}^n, u_{2N}^n, \dots, u_{NN}^n}_{\text{ligne N pour } u^n} \underbrace{v_{11}^n, v_{21}^n, \dots, v_{N1}^n}_{\text{1ere ligne pour } v^n}, \dots, \underbrace{v_{1N}^n, v_{2N}^n, \dots, v_{NN}^n}_{\text{ligne N pour } v^n} \right)^T$$

avec $U^n \in \mathbb{R}^{2N^2}$. De même pour la pression :

$$P^n = \left(\underbrace{p_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^n, p_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^n, \dots, p_{N+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^n}_{\text{1ere ligne pour } p^n}, \underbrace{p_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^n, \dots, p_{N+\frac{1}{2},\frac{3}{2}}^n}_{\text{2e ligne pour } p^n}, \dots, \underbrace{p_{\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}}^n, \dots, p_{N+\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}}^n}_{\text{ligne N pour } p^n} \right)^T$$

avec $P^n \in \mathbb{R}^{(N+1)^2}$.

En écrivant sous forme matricielle les schémas obtenus pour les équations de Navier-stokes, on a :

$$(I_d + A + C^{n-1})U^n + BP^n = \Delta t F^n + U^{n-1}$$

— Le vecteur $F^n \in \mathbb{R}^{2N^2}$ a la même structure que U :

$$F^n = \left(\underbrace{f_{(1),11}^n, \dots, f_{(1),N2}^n, \dots, f_{(1),1N}^n, \dots, f_{(1),NN}^n}_{f_{(1)}^n}, \underbrace{f_{(2),11}^n, \dots, f_{(2),N2}^n, \dots, f_{(2),1N}^n, \dots, f_{(2),NN}^n}_{f_{(2)}^n} \right)^T$$

— La matrice A est de taille $2N^2 \times 2N^2$ et s'écrit

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

où la matrice A_1 est la matrice du Laplacien de taille $N^2 \times N^2$:

$$A_1 = \nu \frac{\Delta t}{h^2} \begin{pmatrix} R & -I_d & & 0 \\ -I_d & R & -I_d & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -I_d & R & -I_d \\ 0 & & & -I_d & R \end{pmatrix} \text{ avec } R = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 4 & -1 \\ 0 & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ de taille } N \times N$$

et I_d désigne la matrice identité de taille $N \times N$.

- La mtrice C^{n-1} provient de la discrétisation de l'opérateur de convection $\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla$ par le schéma *upwind*. Elle est de taille $2N^2 \times 2N^2$ et s'écrit :

$$C^{n-1} = \begin{pmatrix} C_1^{n-1} & 0 \\ 0 & C_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

où la matrice C^{n-1} est de taille $N^2 \times N^2$ et s'écrit :

$$C_1^{n-1} = \frac{\Delta}{h} \begin{pmatrix} C_{1,1}^{n-1} & I_1 & & & 0 \\ J_2 & C_{1,2}^{n-1} & I_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & J_{N-1} & C_{1,N-1}^{n-1} & I_{N-1} \\ 0 & & & J_N & C_{1,N}^{n-1} \end{pmatrix}$$

Les matrices I_j et J_j sont diagonales et de taille $N \times N$ avec

$$I_j = \begin{pmatrix} (v_{ij}^{n-1})^- & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (v_{Nj}^{n-1})^- \end{pmatrix}, \quad J_j = \begin{pmatrix} -(v_{ij}^{n-1})^+ & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -(v_{Nj}^{n-1})^+ \end{pmatrix}$$

La matrice $C_{1,j}^{n-1}$ sont de taille $N \times N$ avec :

$$C_{1,j}^{n-1} = \begin{pmatrix} | u_{1j}^{n-1} + | v_{1j}^{n-1} & (u_{1j}^{n-1})^- & & 0 \\ -(u_{2j}^{n-1})^+ & | u_{2j}^{n-1} + | v_{2j}^{n-1} & (u_{2j}^{n-1})^- & \\ & \dots & \ddots & \\ 0 & & -(u_{N-1,j}^{n-1})^+ & | u_{N-1,j}^{n-1} + | v_{N-1,j}^{n-1} & (u_{N-1,j}^{n-1})^- \\ & & & -(u_{Nj}^{n-1})^+ & | u_{Nj}^{n-1} + | v_{Nj}^{n-1} \end{pmatrix}$$

- La matrice B provient de la discrétisation du gradient de la pression. Elle est de taille $2N^2 \times (N+1)^2$ et s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

La matrice B_1 (resp B_2) correspond à la dérivée par rapport à x (resp y) de la pression. Les matrices B_1 et B_2 sont toutes deux de taille $N^2 \times (N+1)^2$:

$$B_1 = \frac{\Delta}{2h} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{11} & & 0 \\ & B_{11} & B_{11} & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & B_{11} & B_{11} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{\Delta}{2h} \begin{pmatrix} B_{22} & -B_{22} & & 0 \\ & B_{22} & -B_{22} & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & B_{22} & -B_{22} \end{pmatrix}$$

Les matrices B_{11} et B_{22} sont toutes deux de tailles $N \times (N+1)$ et valent :

$$B_{11} = \frac{\Delta}{2h} \begin{pmatrix} -1 & +1 & & 0 \\ & -1 & +1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & +1 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \frac{\Delta}{2h} \begin{pmatrix} -1 & -1 & & 0 \\ & -1 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

La relation de divergence peut s'écrire matriciellement à l'aide de la matrice B précédente :

$$B^T U^n = 0$$

En regroupant les relations, on obtient :

$$\begin{pmatrix} I_d + A + C^{m-1} & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^n \\ P^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t F^n + U^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

— Résolution du système discrétisé de Navier-Stokes

Pour résoudre ce système, il faut qu'on utilise une méthode de pénalisation en considérant le système modifié suivant :

$$\begin{pmatrix} I_d + A + C^{n-1} & B \\ B^T & -\epsilon I_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^n \\ P^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t F^n + U^{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec un paramètre $\epsilon > 0$ petit. On découple alors les équations vitesse/pression :

$$\begin{aligned} (I_d + A + C^{n-1} + \frac{1}{\epsilon} B B^T) (U^n) &= (\Delta t F^n + U^{n-1}) \\ P^n &= \frac{1}{\epsilon} B^T U^n \end{aligned}$$

— Conditions de Dirichlet non-homogènes - Traitement des conditions limites

On construit les matrices en tenant compte de tous les noeuds, y compris ceux du bord. On met ensuite à jour les seconds membres et les matrices en éliminant les lignes et colonnes correspondants à des noeuds du bord. On construit la matrice $\tilde{C}^{n-1}$ de taille $2(N+2)^2 \times 2(N+2)^2$ défini par

$$\tilde{C}^{n-1} = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \tilde{C}_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

où $\tilde{C}_1^{n-1}$ est une matrice tridiagonale de taille $(N+2)^2 \times (N+2)^2$ et s'écrit

$$\tilde{C}_1^{n-1} = \begin{pmatrix} |u_{00}^{n-1}| + |v_{00}^{n-1}| & (u_{00}^{n-1})^- & & & 0 \\ -(u_{10}^{n-1})^+ & |u_{10}^{n-1}| + |v_{10}^{n-1}| & (u_{10}^{n-1})^- & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -(u_{N,N+1}^{n-1})^+ & |u_{N,N+1}^{n-1}| + |v_{N,N+1}^{n-1}| & (u_{N,N+1}^{n-1})^- \\ 0 & & & -(u_{N+1,N+1}^{n-1})^+ & |u_{N+1,N+1}^{n-1}| + |v_{N+1,N+1}^{n-1}| \end{pmatrix}$$

0.2.3 Stabilité du schéma

Pour espérer avoir une convergence du schéma, il faut que la condition CFL suivante soit respectée :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Ce qui d'ailleurs justifie le choix des données dans le cas pratique à suivre.

0.3 Simulations numérique

Un cas pratique a été mis en évidence pour visualiser les solutions des équations de Navier-Stokes à partir du schéma numérique proposé.

Cas pratique

On choisit l'exemple de la cavité entraînée avec

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sur les bords } \{x = 0\}, \{x = 1\} \quad \text{et} \quad \{y = 0\}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sur le bord } \{y = 1\}$$

La force vaut $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \end{pmatrix}$ et la viscosité $\nu = 10^{-2}$.

On obtient une représentation de la vitesse à différents instants calculée par le schéma semi-implicite sur un maillage 91×91 et avec un pas de temps $\Delta t = 0.05$ (*voir le code python fourni*).

Conclusion

Les équations de Navier-Stokes constituent un outil puissant pour la compréhension et la prédiction du comportement des fluides.

Malgré leur complexité mathématique, elles demeurent un élément fondamental de la mécanique des fluides et ont de nombreuses applications dans divers domaines scientifiques et d'ingénierie.

Nos recherches futures visent à développer ou explorer des méthodes numériques plus efficaces que celles des différences finies pour résoudre ces équations et à élargir encore leur champ d'application.

Résumé

Ce travail étudie le mouvement de fluide par le biais des équations de Navier-Stokes en utilisant la méthode de résolution par différences finies. Un cas pratique est choisi pour effectuer des simulations numériques en langage python.

Abstract

This work studies fluid motion through the Navier-Stokes equations using the finite difference solution method. A practical case is chosen to carry out numerical simulations in Python language.